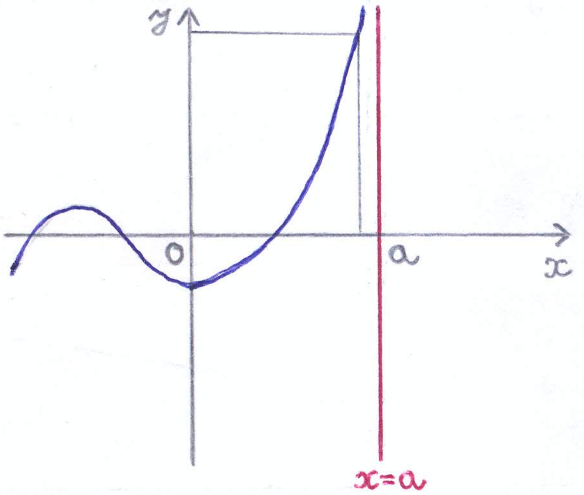
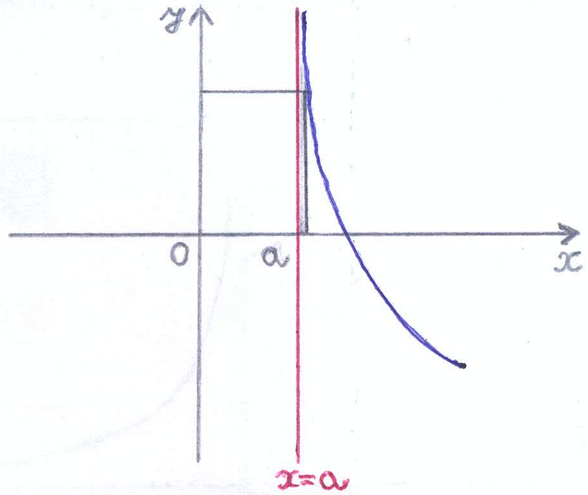
ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА И ЦРТАЊЕ ГРАФИКА – предавања

* Асимптоте

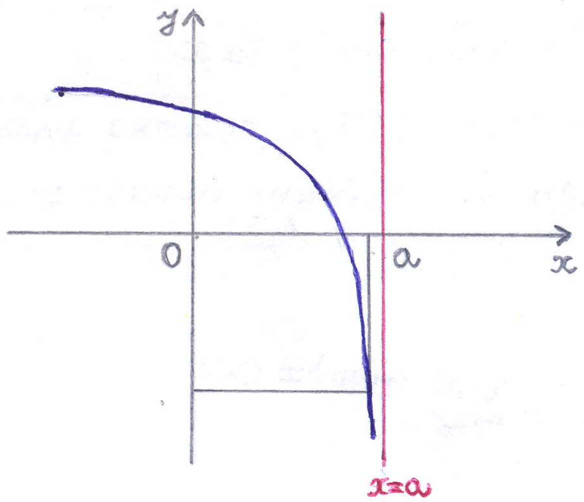
1° Вертикалне асимптоте



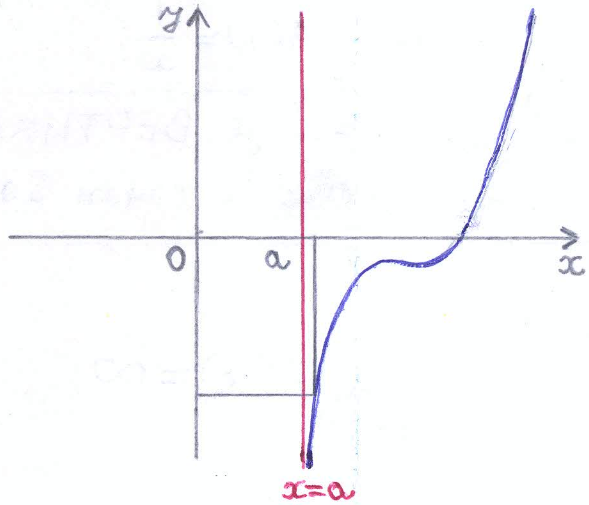
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$



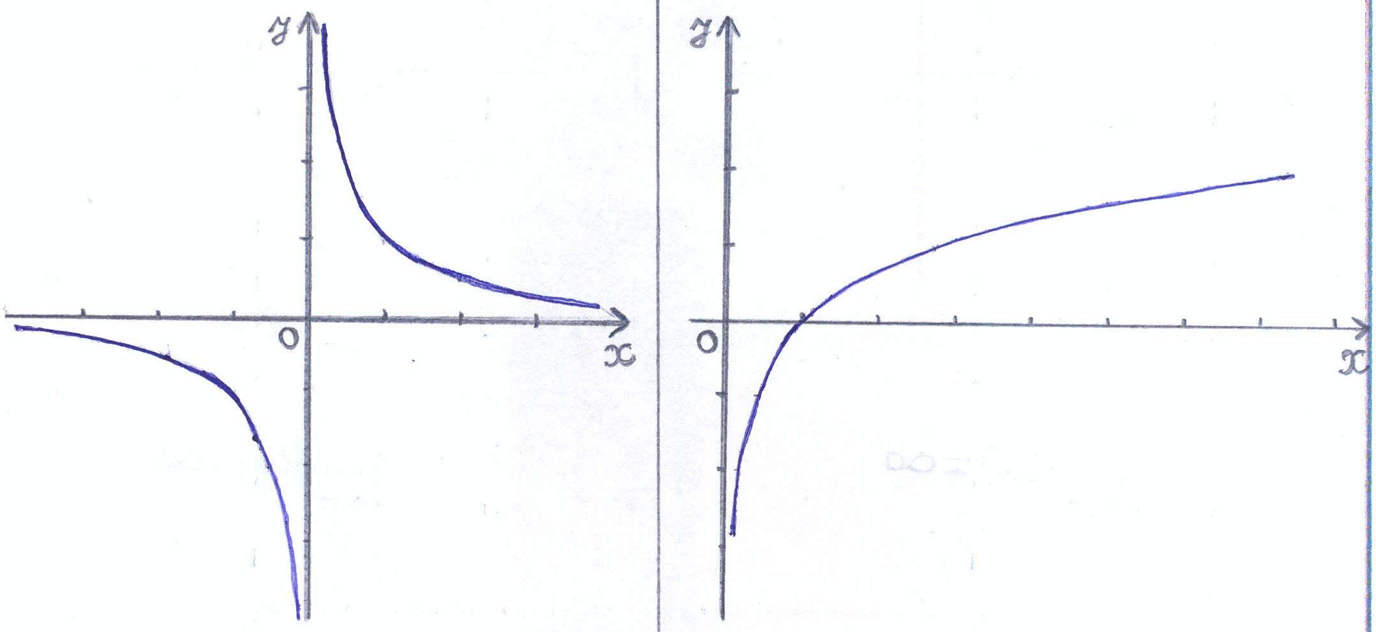
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Пример: (а) $f(x)=\frac{1}{x}$ (хипербола). Имали смо $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$. Права $x=0$ је вертикална асимптота функције $f(x)=\frac{1}{x}$.

(б) $f(x)=\ln x$ (логаритамска функција). Домен функције је интервал $(0,+\infty)$, па има смисла тражити само десну граничну вредност у 0. Како је $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, то је права $x=0$ (y-оса) вертикална асимптота графика функције.

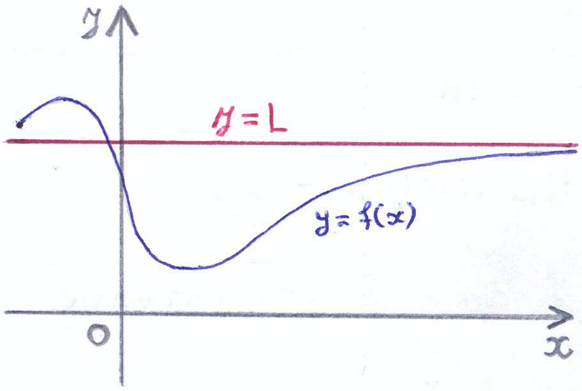


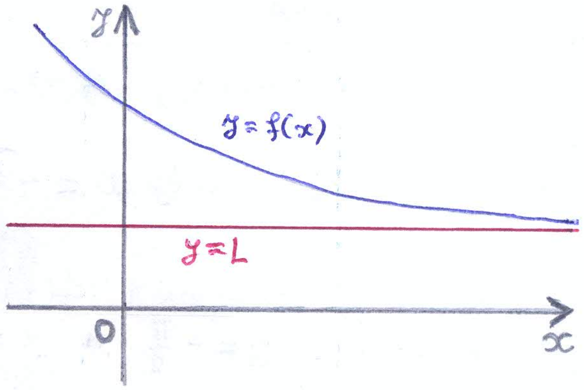
(а) $f(x)=\frac{1}{x}$ (б) $f(x)=\ln x$

- Права $x=a$ је **ВЕРТИКАЛНА АСИМПТОТА** графика функције $y=f(x)$ ако је тачан барем један од следећих исказа:

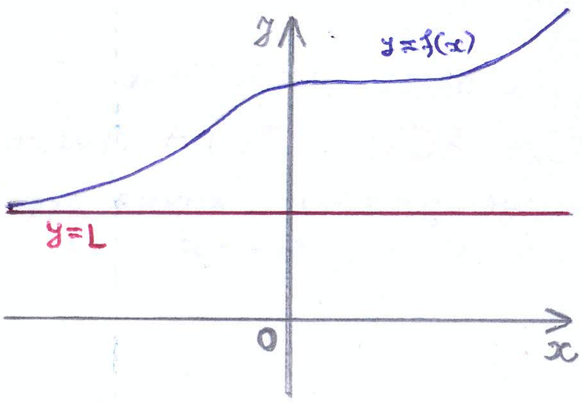
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

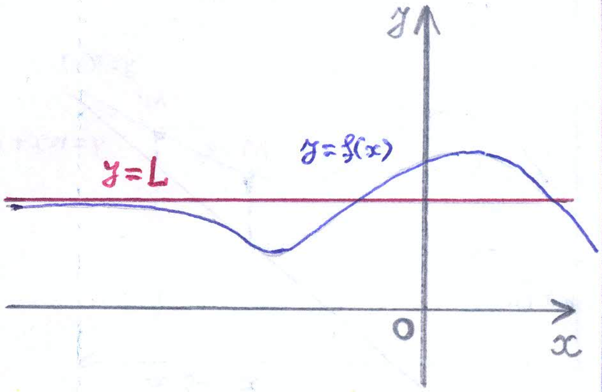
2° Хоризонталне асимптоте





$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$





$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

• Права $y=L$ је **ХОРИЗОНТАЛНА АСИМПТОТА** графика функције $y=f(x)$ ако је

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

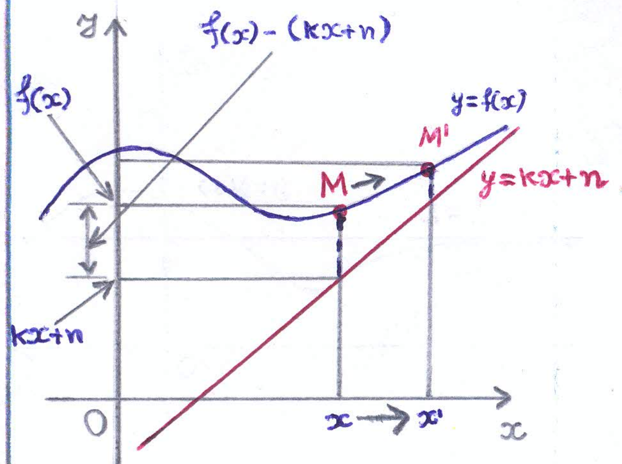
Пример. а) За функцију $f(x)=\operatorname{arctg} x$ важи

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

То значи да функција $f(x)=\operatorname{arctg} x$ има 2 хоризонталне асимптоте: $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$.

б) Опет посматрамо функцију $f(x)=\frac{1}{x}$. Из $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ закључујемо да је права $y=0$ (x – оса) хоризонтална асимптота графика функције.

3° Косе асимптоте



• Ако важи

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+n)\right]=0,$$

онда је права $y=kx+n$ **КОСА АСИМПТОТА** графика функције $y=f(x)$. Слична дефиниција постоји кад $x\to-\infty$.

Показаћемо на једном примеру како се тражи коса асимптота рационалне функције. За функцију $f(x)=\frac{3x^2+2}{x+1}$ важи

$$f(x)=\frac{3x^2+2}{x+1}=\frac{3x^2+3x-3x+2}{x+1}=\frac{3x(x+1)-3x-3+5}{x+1}=\frac{3x(x+1)-3(x+1)+5}{x+1}=$$

$$=\frac{(3x-3)(x+1)+5}{x+1}=\frac{(3x-3)(x+1)}{x+1}+\frac{5}{x+1}=3x-3+\frac{5}{x+1},\ x\neq-1$$

Дакле: $\underbrace{\frac{3x^2+2}{x+1}}_{f(x)} = \underbrace{3x-3} + \frac{5}{x+1}$. Сада имамо

$$f(x) - (3x-3) = \frac{5}{x+1},$$ и зато важи

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-3)\right]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x+1} = 5\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(1+\frac{1}{x})}$$

$$= 5\cdot\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right] = 0$$

Следи да је права $y=3x-3$ коса асимптота графика функције $f(x)=\frac{3x^2+2}{x+1}$ кад $x\to+\infty$. На исти начин се може добити да је права $y=3x-3$ коса асимптота графика функције и кад $x\to-\infty$.

• Нека је $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ рационална функција. Ако је степен полинома P за један већи од степена полинома Q, онда график функције R има косу асимптоту кад $x\to+\infty$ и кад $x\to-\infty$.

У претходном примеру $R(x)=\frac{3x^2+2}{x+1}$, $P(x)=3x^2+2$ и $Q(x)=x+1$. Видимо да је степен полинома P за један већи од степена полинома Q.

Када $x\to+\infty$ могу се десити следећи случајеви:

I Функција има хоризонталну асимптоту;

II Функција има косу асимптоту;

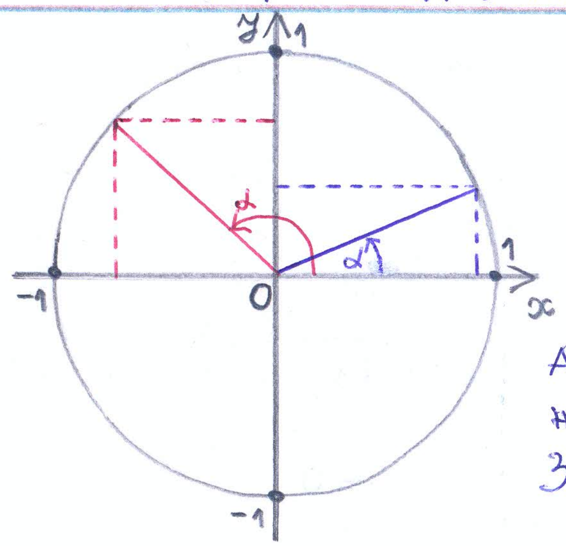
III Функција нема ни хоризонталну ни косу асимптоту.

Приметимо да ако график има хоризонталну асимптоту кад $x\to+\infty$, онда нема косу асимптоту кад $x\to+\infty$, и обрнуто, ако график има косу асимптоту, онда нема хоризонталну.

Поступак: Прво испитујемо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Уколико је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ и L је коначан (реалан) број, онда је права $y=L$ хоризонтална асимптота графика кад $x\to+\infty$. Ако $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не постоји или није једнак коначном броју, онда закључујемо да график нема хоризонталну асимптоту, и потом испитујемо да ли има косу асимптоту.

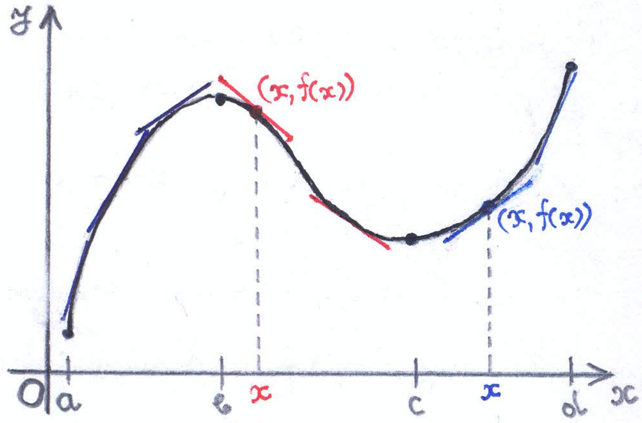
Све ово што смо рекли важи и за случај када $x\to-\infty$. Дакле, случај кад $x\to-\infty$ треба посебно испитати.

* Шта нам први извод f' говори о функцији f?



Подсетимо се тригонометријског круга: Ако је угао α оштар ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, плава боја на слици), онда је $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$. Следи да за оштре углове важи $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$.

Ако је угао α туп ($\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, црвена боја на слици), онда је $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha<0$. За тупе углове важи $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}<0$.



На слици лево представљен је график неке функције $y=f(x)$. Функција f расте на интервалима (a,b) и (c,d), а опада на интервалу (b,c). Нацртајмо тангенте у неким тачкама графика функције f. Уочавамо следећу особину: када су у питању интервали где функција расте, ту тангенте образују оштар угао са позитивним смером x-осе; код интервала где функција опада тангенте заклапају туп угао са позитивним смером x-осе.

Уочимо, рецимо, интервал (c,d) на коме функција f расте. Нека тангента у тачки $(x,f(x))$ има коефицијент правца k и нека је α угао који та тангента образује са позитивним смером x-осе. Како је α оштар угао, онда је $\operatorname{tg}\alpha>0$. Добијамо $f'(x)=k=\operatorname{tg}\alpha>0$. Пошто је x произвољна тачка интервала (c,d), важиће $f'(x)>0$ за сваку тачку x из интервала (c,d).

Са друге стране, посматрајмо сада интервал (b,c) на коме функција f опада. Тангента у тачки $(x,f(x))$ гради туп угао са позитивним смером x-осе, па је $\operatorname{tg}\alpha<0$. Добијамо $f'(x)=k=\operatorname{tg}\alpha<0$. Дакле, за сваку тачку x из интервала (b,c) ће важити $f'(x)<0$.

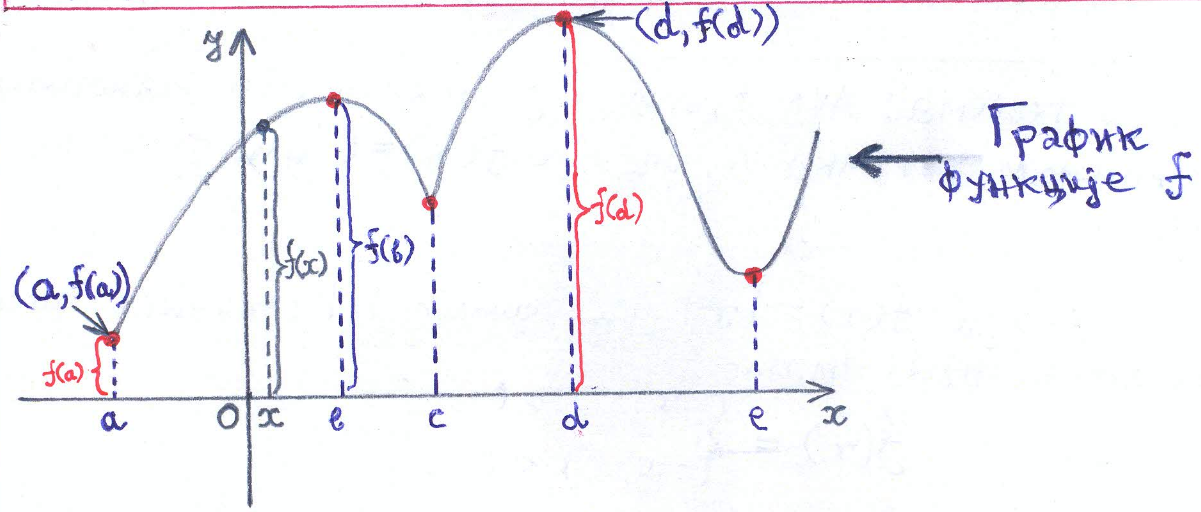
- Ако је $f'(x)>0$ на неком интервалу, онда функција f расте на том интервалу.

- Ако је $f'(x)<0$ на неком интервалу, онда функција f опада на том интервалу.

Екстремне вредности функције

Нека је x_0 тачка из домена $D(f)$ функције f. Тада је $f(x_0)$:

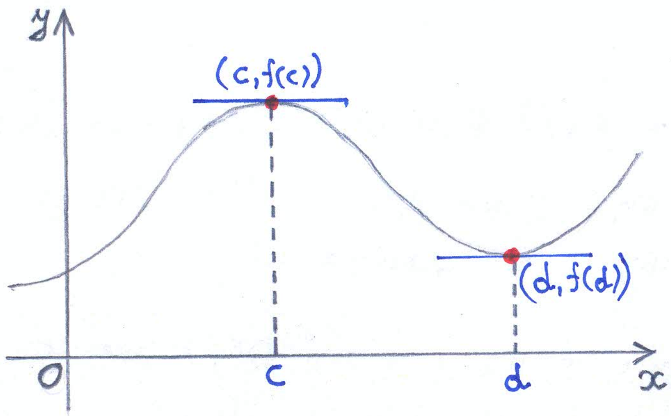
- **апсолутни максимум** функције f на домену $D(f)$ ако је $f(x_0) \geq f(x)$ за сваку тачку x из домена $D(f)$.
- **апсолутни минимум** функције f на домену $D(f)$ ако је $f(x_0) \leq f(x)$ за сваку тачку x из домена $D(f)$.



Функција f има апсолутни максимум у тачки d и апсолутни минимум у тачки a. Тачка $(d, f(d))$ је највиша тачка на графику, док је $(a, f(a))$ најнижа тачка на графику. Посматрајмо сада тачке x које су близу тачке b (рецимо, узмимо интервал (a, c)). У том случају $f(b)$ је већа вредност од свих вредности $f(x)$ (видети слику) и кажемо да је $f(b)$ **локални максимум** функције f. Слично, $f(c)$ је **локални минимум** функције f јер је $f(c) \leq f(x)$ када је x близу c (можемо посматрати интервал (b, d)). Такође, функција f има локални минимум и у тачки e.

Вредност $f(x_0)$ је:

- **локални максимум** функције f ако је $f(x_0) \geq f(x)$ за вредности x које су близу x_0.
- **локални минимум** функције f ако је $f(x_0) \leq f(x)$ за вредности x које су близу x_0.



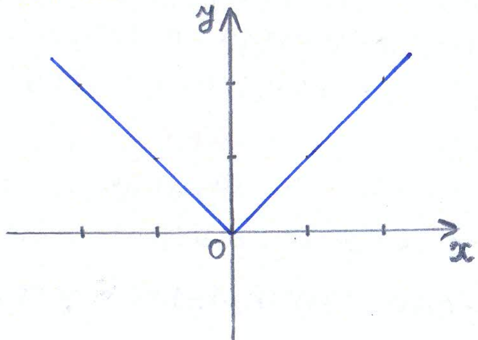
Функција f има локални максимум у тачки c и локални минимум у тачки d. Тангенте у тачкама $(c,f(c))$ и $(d,f(d))$ су паралелне са x-осом, тј. угао између тангенте (било које) и позитивног смера x-осе износи нула. То даље значи да коефицијенти правца тих тангенти имају вредност 0, односно $f'(c)=0$ и $f'(d)=0$.

Фермаова теорема: Ако функција f има локални максимум или минимум у тачки x_0, онда је $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не постоји.

Пример. Нека је $f(x)=|x|$, где симбол $|\ |$ означава апсолутну вредност броја. Имамо:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Рецимо, $f(3)=3$, али $f(-7)=-(-7)=7$. На слици 1 је представљен график функције $f(x)=|x|$. Видимо да функција f има локални минимум у тачки $x=0$. Нађимо сада $f'(x)$.



Слика 1: $f(x)=|x|$

$\boxed{\text{I}\ x>0}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}$$

Јасно, $|x|=x$. Нека је h довољно мало тако да је $x+h>0$. Сада је и $|x+h|=x+h$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

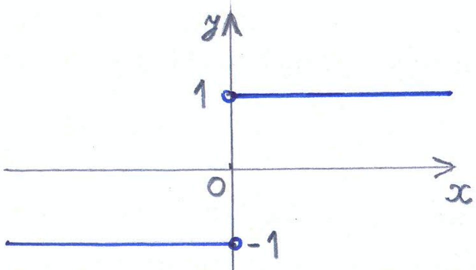
$\boxed{\text{II}\ x<0}$

$|x|=-x$, h је довољно мало тако да је $x+h<0$, тј. $|x+h|=-(x+h)$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-x-h+x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1.$$



Слика 2: $y=f'(x)$

$\boxed{\text{III } x=0}$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$. Нађимо посебно леви и десни лимес:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}&=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1\\ \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}&=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1\end{aligned}\right\}$$

Пошто су леви и десни лимес међусобно различити, онда следи да лимес $\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ не постоји, односно извод $f'(0)$ не постоји!

Показали смо да функција $f(x)=|x|$ није диференцијабилна у тачки $x=0$. Имамо:

$$f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\\ \text{Не постоји}, & x=0\end{cases}$$

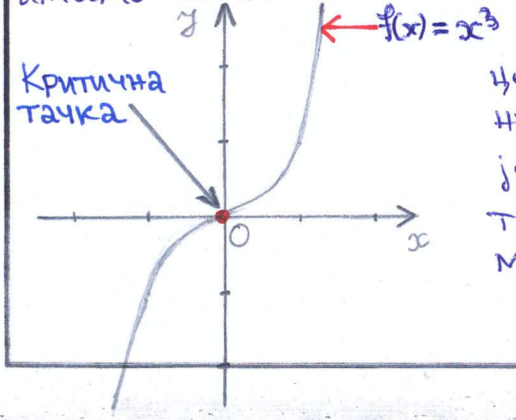
График функције f' је представљен на слици 2. Функција $f(x)=|x|$ је пример функције која има локални минимум у нули, али $f'(0)$ не постоји.

Критична тачка функције f је број x_0 из домена функције f такав да је $f'(x_0)=0$ или је такав да $f'(x_0)$ не постоји.

Сада Фермаову теорему можемо и овако исказати:

Ако функција f има локални максимум или минимум у x_0, онда је x_0 критична тачка функције f.

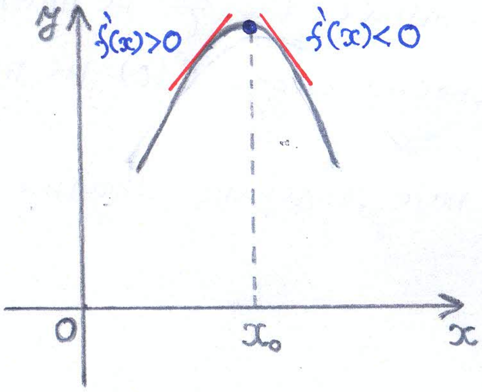
Са друге стране, неће свака критична тачка бити уједно и тачка локалног минимума или локалног максимума. Због тога је потребно да за сваку критичну тачку утврдимо да ли у њој имамо и локални минимум или максимум, или немамо.



Пример. Функција $f(x)=x^3$ је растућа на целом свом домену – f нема локални максимум ни минимум. Са друге стране, $f'(x)=3x^2$, па је $f'(0)=0$. То значи да је 0 критична тачка функције f, али није тачка локалног максимума ни минимума.

Нека је x_0 критична тачка функције f.

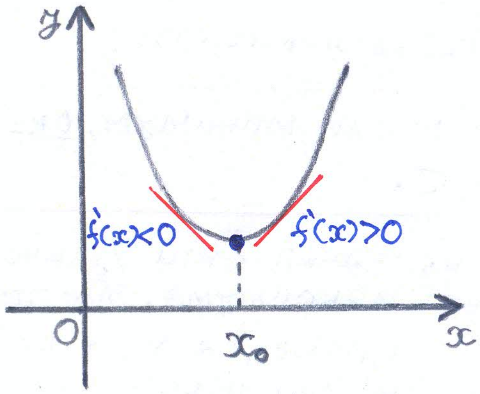
I Ако f' мења знак од + у − у тачки x_0, онда функција f има локални максимум у x_0. Вредност тог локалног максимума је $f(x_0)$. Одговарајућа тачка на графику функције f је $(x_0, f(x_0))$.



Слика: Локални максимум

Пошто је $f'(x)>0$ за тачке које су лево од x_0, онда је функција f растућа у области лево од x_0. Слично, због $f'(x)<0$ за тачке које су десно од x_0, онда је f опадајућа функција у области десно од x_0. Закључујемо да функција f има локални максимум у тачки x_0. Наравно, на слици је представљен само део графика функције f – график може да се протеже и лево и десно у односу на нацртани део.

II Ако f' мења знак од − у + у тачки x_0, онда функција f има локални минимум у x_0. Вредност тог локалног минимума је $f(x_0)$. Одговарајућа тачка на графику функције f је $(x_0, f(x_0))$.



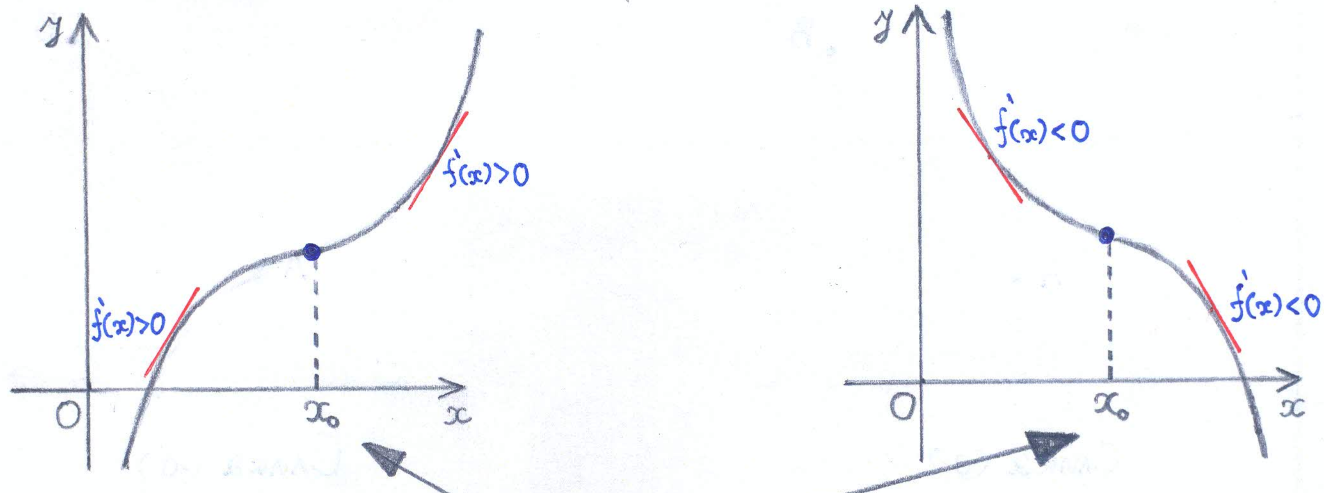
Слика: Локални минимум

$f'(x)<0$ за тачке које су лево од x_0 – то значи да f опада у тој области.

$f'(x)>0$ за тачке које су десно од x_0 – то значи да f расте у тој области.

Следи да функција f има локални минимум у тачки x_0.

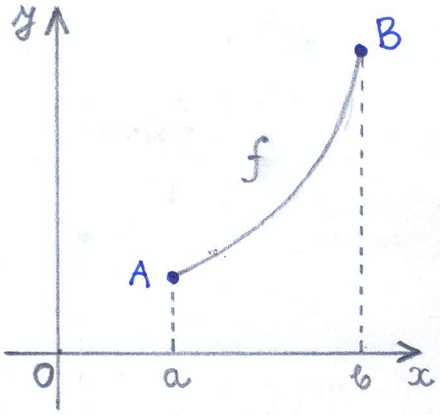
III Могуће је да f' не мења знак у тачки x_0: f' има позитивну вредност и лево и десно у односу на x_0 или f' има негативну вредност лево и десно од x_0. У том случају функција f нема ни локални минимум ни локални максимум у тачки x_0.



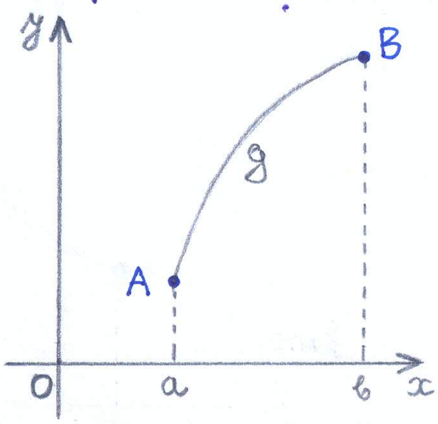
x_0 није није ни локални минимум ни локални максимум

* Шта нам други извод f'' говори о функцији f?

На сликама (а) и (б) су графици две растуће функције. Оба графика спајају тачке A и B, али очигледно је да графици изгледају различито – савијени су на различите стране. Како направити разлику између ова два типа графика?

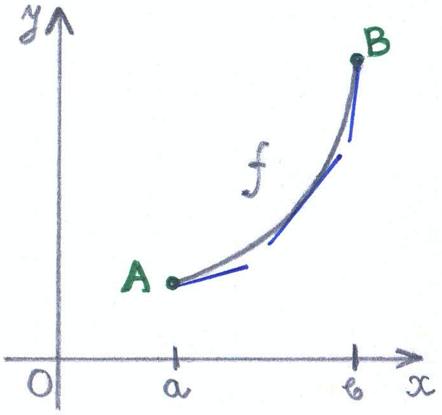


Слика (а)

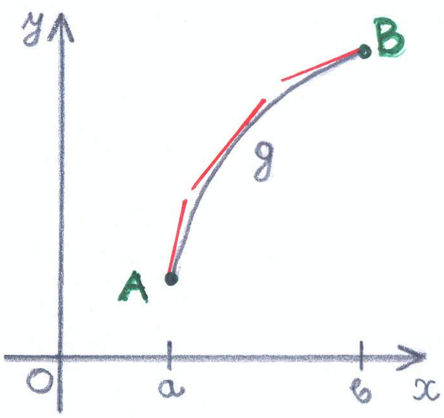


Слика (б)

Размотримо сада слике (а) и (б) са више детаља. Нацртаћемо по неколико тангенти и на један и на други график.



Слика (а1)
– конвексност –

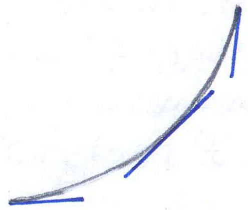
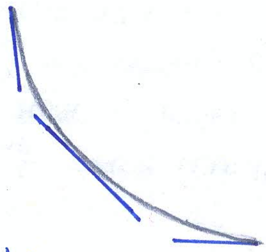
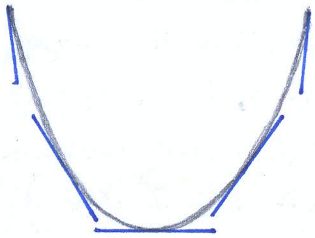
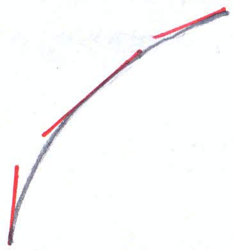
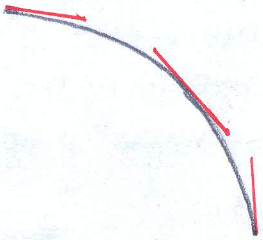
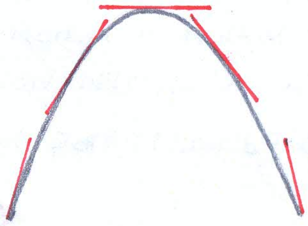


Слика (б1)
– конкавност –

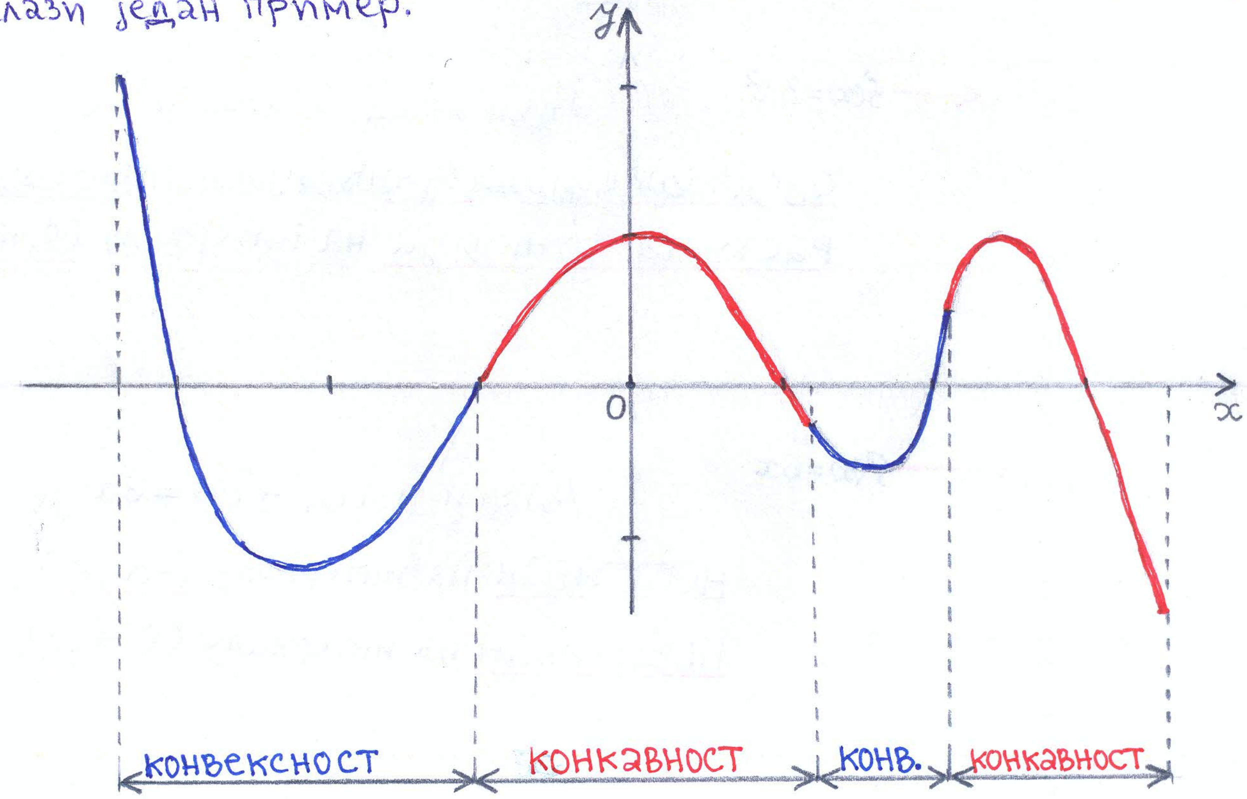
На слици (а1) график лежи изнад тангенти и кажемо да је функција f конвексна на интервалу (a,b). На слици (б1) график лежи испод тангенти и кажемо да је функција g конкавна на интервалу (a,b).

Функција f је **конвексна** на неком интервалу ако се њен график налази **изнад** свих њених тангенти на том интервалу.
Функција f је **конкавна** на неком интервалу ако се њен график налази **испод** свих њених тангенти на том интервалу.

У следећој табели приказујемо на које све начине функција може бити конвексна или конкавна на неком интервалу.

 Конвексност Функција је растућа	 Конвексност Функција је опадајућа	 Конвексност
 Конкавност Функција је растућа	 Конкавност Функција је опадајућа	 Конкавност

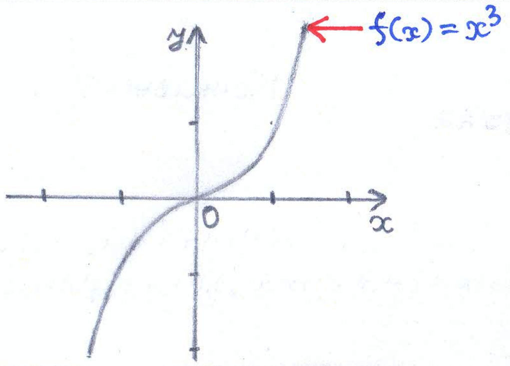
Функција може на неким интервалима да буде конвексна, а на неким другим интервалима да буде конкавна. На доњој слици се налази један пример.



Вратимо се опет на слику (а1) са стр. 12. Гледајући с лева на десно, углови које тангенте заклапају са позитивним смером x-осе су све већи и већи. То значи да се тангенси тих углова повећавају, односно први извод f' узима све веће вредности. Пошто је f' растућа функција, онда следи да је други извод f'' позитиван (ако је функција растућа онда је њен извод позитиван - видети стр. 6; извод првог извода f' је други извод f''; како је f' растућа функција онда је $f''>0$).

На слици (б1) са стр. 12 приказана је конкавна функција. Ако опет слику посматрамо са леве на десну страну, закључујемо да су углови које тангенте заклапају са позитивним смером x-осе све мањи и мањи. То значи да је f' опадајућа функција и због тога је други извод f'' негативан.

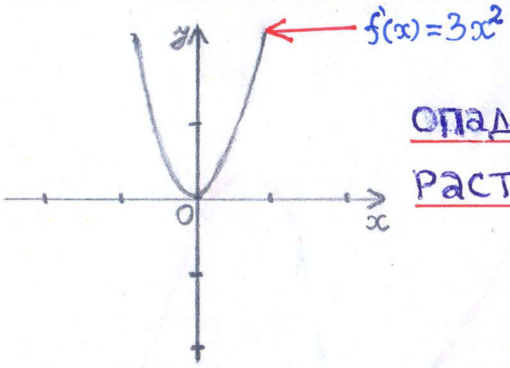
Ово разматрање ћемо поткрепити једним примером.



Функција $f(x) = x^3$ је

конкавна на интервалу $(-\infty, 0)$;

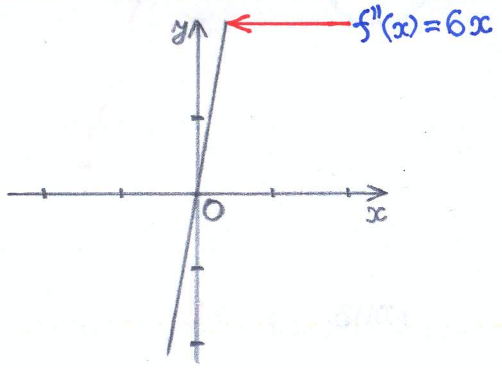
конвексна на интервалу $(0, +\infty)$.



Први извод $f'(x) = 3x^2$ је

опадајућа функција на интервалу $(-\infty, 0)$;

растућа функција на интервалу $(0, +\infty)$.



Други извод $f''(x) = 6x$ је

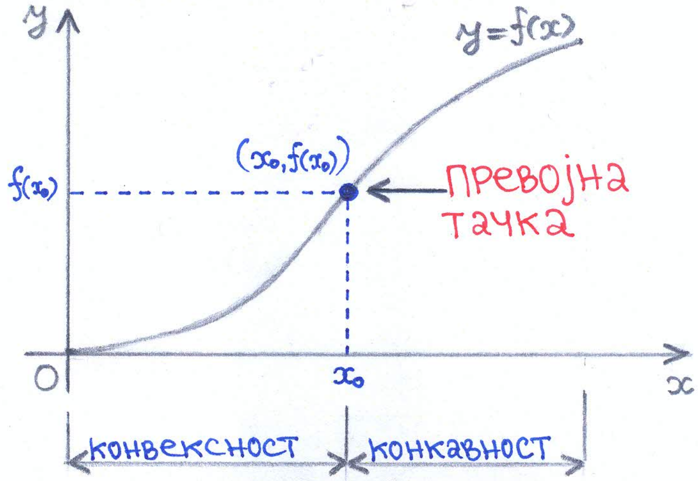
негативан на интервалу $(-\infty, 0)$;

позитиван на интервалу $(0, +\infty)$.

На основу претходног разматрања закључујемо следеће:

- Ако је $f''(x)>0$ за свако x из неког интервала, онда је функција f конвексна на том интервалу.
- Ако је $f''(x)<0$ за свако x из неког интервала, онда је функција f конкавна на том интервалу.

На слици је представљена функција која је на једном интервалу конвексна, а потом постаје конкавна. Тачка на графику где се та промена дешава назива се превојна тачка.



За тачку на графику функције кажемо да је превојна тачка ако у тој тачки функција прелази из конвексности у конкавност или из конкавности у конвексност.

* Поступак за испитивање функција и за цртање њихових графика

1° Област дефинисаности

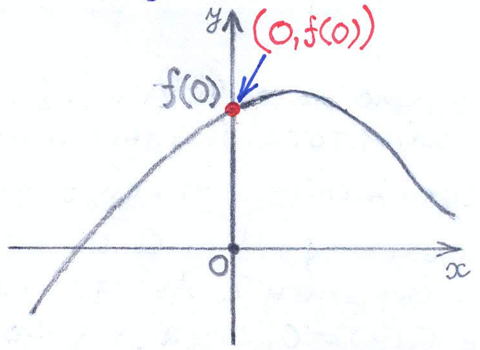
Нека је задата функција $y=f(x)$. Област дефинисаности функције f (домен функције f) обележавамо са $D(f)$ и то је скуп свих реалних бројева x за које постоји $f(x)$. Ако је функција f полином, онда је $D(f)=(-\infty,+\infty)$. Ако је f рационална функција, тј. $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где су P и Q полиноми, онда морамо да водимо рачуна да именилац $Q(x)$ буде различит од нуле. Уколико је за неко x израз $Q(x)=0$ онда функција f није дефинисана – нема смисла делити са нулом.

2° Нуле функције

Нула функције f је број x такав да је $f(x)=0$. Дакле, да бисмо нашли нуле функције треба решити једначину $f(x)=0$. У општем случају, нула функције x је број различит од нуле. Може да се деси да нуле функције не постоје или да функција има више нула функције. Ако је x нула функције, тј. $f(x)=0$, онда тачка $(x,0)$ припада графику функције f. Приметимо да тачка $(x,0)$ припада и x-оси – у тој тачки график функције f сече x-осу.

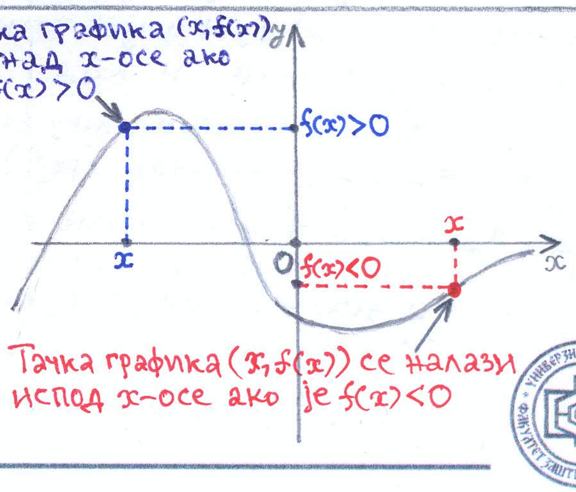
3° Пресек са y-осом

Ако је функција f дефинисана у тачки $x=0$, онда треба наћи $f(0)$. Тачка $(0,f(0))$ припада графику функције f, али и y-оси – у тој тачки график функције f сече y-осу.



4° Знак функције

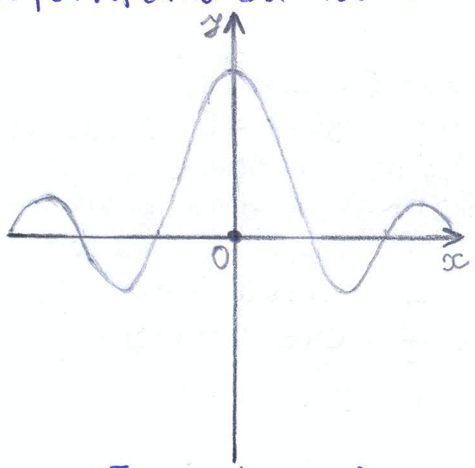
Треба наћи интервале на којима је функција позитивна ($f(x)>0$) и на којима је негативна ($f(x)<0$). График се налази изнад x-осе на местима где је функција позитивна; график се налази испод x-осе на местима где је функција негативна.



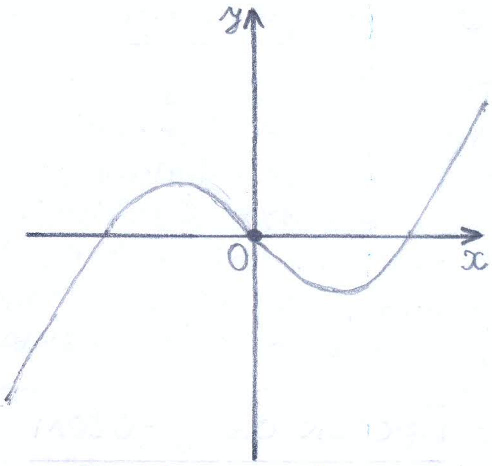
5° Парност

Функција f је парна ако је $f(-x)=f(x)$ за свако x из домена функције f. График парне функције је симетричан у односу на y-осу. Ако знамо график у области $x\geq 0$, онда остатак графика добијамо тако што познати део пресликамо у односу на y-осу.

Функција f је непарна ако је $f(-x)=-f(x)$ за свако x из домена функције f. График непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак. Ако знамо како график изгледа за $x\geq 0$, онда комплетан график добијамо када тај познати део заротирамо за $180°$ око координатног почетка.



(а) Парна функција



(б) Непарна функција

Ако функција f не задовољава ни један од услова $f(-x)=f(x)$ и $f(-x)=-f(x)$, онда она није ни парна ни непарна.

6° Асимптоте

У овој тачки испитујемо да ли функција има вертикалне, хоризонталне или косе асимптоте. Полиноми немају вертикалне асимптоте. Посматрајмо сада рационалну функцију $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где су P и Q полиноми (претпостављамо да P и Q немају заједничких чинилаца, тј. не може се ништа скратити). Ако тачка a не припада домену функције f, тј. ако је $Q(a)=0$, онда је права $x=a$ вертикална асимптота графика функције (потребно је само испитати како се функција понаша када $x\to a^-$ и када $x\to a^+$).

Функција f има хоризонталну асимптоту $y=L$ када $x\to+\infty$ ако је $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ (L је коначан број). Ако, рецимо, добијемо да је $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, онда функција f нема хоризонталну асимптоту када $x\to+\infty$, али ипак нешто можемо закључити: $f(x)$ је све већи број кад $x\to+\infty$. Слично, ако је $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$, онда функција f има хоризонталну асимптоту $y=L$ када $x\to-\infty$. Обавезно, дакле, треба испитати и $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. О косој асимптоти смо писали на стр. 4 и стр. 5.

7° Монотоност и екстремне вредности

Ову тачку започињемо рачунањем првог извода $f'(x)$. После тога налазимо интервале где је $f'(x) > 0$ (на тим интервалима функција f расте) и налазимо интервале где је $f'(x) < 0$ (на тим интервалима функција f опада). Затим одређујемо критичне тачке (тачка x_0 из домена функције f је критична тачка ако је $f'(x_0) = 0$ или ако $f'(x_0)$ не постоји). Ако f' у критичној тачки x_0 мења знак од $+$ у $-$, тада f у тачки x_0 има локални максимум; вредност тог локалног максимума је $f(x_0)$. Ако f' мења знак од $-$ у $+$ у критичној тачки x_0, тада f има локални минимум у x_0; вредност тог локалног минимума је $f(x_0)$.

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

Прво рачунамо други извод $f''(x)$. Подсетимо се да је други извод $f''(x)$ извод првог извода $f'(x)$ и да смо први извод $f'(x)$ већ нашли у тачки 7°. Функција f је конвексна на интервалима где је $f''(x) > 0$ и конкавна је на интервалима где је $f''(x) < 0$ (да бисмо одредили где је функција f конвексна и где је конкавна, морамо испитати знак другог извода $f''(x)$). Превојне тачке се јављају где функција прелази из конвексности у конкавност или из конкавности у конвексност.

9° Цртање графика

Најпре цртамо координатне осе, а затим (уколико постоје) цртамо асимптоте (пожељно је да за асимптоте користимо неку другу боју). Сада у xOy равни налазимо тачке кроз које график сигурно пролази – пресеци са x-осом и са y-осом, минимуми, максимуми и превојне тачке. Сада водећи рачуна и о осталим информацијама до којих смо дошли током испитивања функције цртамо график. Некада нам за цртање графика нису потребни сви кораци од 1° до 8°, али без обзира на то, препорука је да увек прођемо кроз све кораке.

Напомена: Код тачке 7°, симбол $\nearrow$ означава да је функција растућа на посматраном интервалу, док симбол $\searrow$ показује да је функција опадајућа на посматраном интервалу. Даље, у тачки 8°, симбол $\cup$ указује на конвексност, а симбол $\cap$ на конкавност.

Тачка 6°: $+0$ је позитиван број близак нули (мали позитиван број).
-0 је негативан број близак нули (рецимо број $-0{,}0001$).

Када на бројној оси прецртамо неку тачку симболом $\times$ то значи да се та тачка не разматра – функција није дефинисана у тој тачки.

Пример. Скицирати график функције $f(x) = x^3 + 3x^2$.

1° Област дефинисаности

Функција f је полином.

$D(f) = (-\infty, +\infty)$

2° Нуле функције

$f(x) = x^3 + 3x^2 = 0$

$x^2(x+3) = 0$

$x^2 = 0$ или $x+3 = 0$

$x = 0$ или $x = -3$

$(0,0)$; $(-3,0)$.

3° Пресек са y-осом

$x = 0 \to f(0) = 0^3 + 3\cdot 0^2 = 0$

$(0,0)$

4° Знак функције

$f(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,+\infty)$
x^2	+ +	+ + + + + + +	+ + + +
$x+3$	− −	+ + + + + +	+ + + +
$f(x)$	− −	+ + + + + +	+ + + +

-3, 0

f је негативна на инт. $(-\infty,-3)$

f је позитивна на инт. $(-3,0)$ и $(0,+\infty)$

5° Парност

$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$

f није ни парна ни непарна.

$f(x) = x^3 + 3x^2$, $-f(x) = -x^3 - 3x^2$

Као што видимо, $f(-x) = -x^3 + 3x^2$ се разликује и од $f(x)$ и од $-f(x)$, и зато функција f није ни парна ни непарна.

6° Асимптоте

Функција f нема вертикалне асимптоте.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{3}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{3}{x}\right) = -\infty$$

7° Монотоност и екстремне вредности

$f'(x) = (x^3+3x^2)' = 3x^2 + 3(x^2)' = 3x^2 + 3\cdot 2x$,

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x\cdot(x+2)$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
x	− − −	− − − − −	+ + + + +
$x+2$	− − −	+ + + +	+ + + + +
$f'(x)$	+ + + ↗ ↗	− − − − ↘ ↘ ↘	+ + + + + ↗ ↗ ↗ ↗

-2, 0

f расте на инт. $(-\infty,-2)$ и $(0,+\infty)$.

f опада на инт. $(-2,0)$.

$f'(-2) = 0$, $f'(0) = 0 \to -2$ и 0 су критичне тачке

$x = -2 \leftarrow$ локални максимум

$f(-2) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 = 4$; $(-2,4)$

$x = 0 \leftarrow$ локални минимум

$f(0) = 0$; $(0,0)$

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

$f''(x) = (3x^2+6x)' = 6x+6$;

$f''(x) = 6(x+1)$;

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$x+1$	− − − −	+ + + +
$f''(x)$	− − − ∩	+ + + + ∪

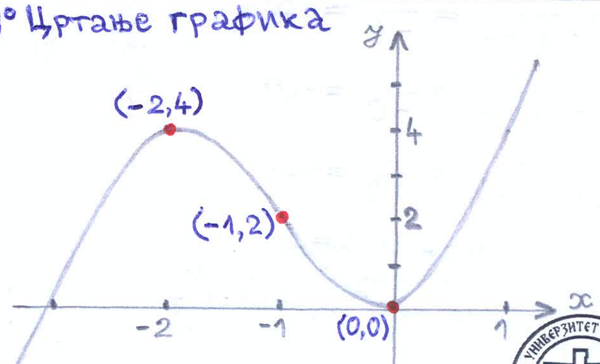
-1

f је конкавна на инт. $(-\infty,-1)$.

f је конвексна на инт. $(-1,+\infty)$.

$f(-1) = (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 = 2$; Превојна тачка $(-1,2)$.

9° Цртање графика



Пример. Скицирати график функције $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

1° Област дефинисаности

Функција f је рационална.

$x^2-4=0$, $(x-2)(x+2)=0$, $x=2$ или $x=-2$;

$D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

2° Нуле функције

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}=0\rightarrow x=0$;

$(0,0)$;

3° Пресек са y-осом

$x=0\rightarrow f(0)=\dfrac{0}{0^2-4}=0$; $(0,0)$.

4° Знак функције

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

f је позитивна на инт. $(-2,0)$ и $(2,+\infty)$;

f је негативна на инт. $(-\infty,-2)$ и $(0,2)$.

5° Парност

$f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x}{x^2-4}=-f(x)$

Функција f је непарна - график је симетричан у односу на координатни почетак.

6° Асимптоте

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2}{+0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2}{-0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{+0}=+\infty$$

Праве $x=-2$ и $x=2$ су вертикалне асимптоте графика функције f.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{1-\overset{\nearrow 0}{\frac{4}{x^2}}}=0;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=0$$

Права $y=0$ (x-оса) је хоризонтална асимптота графика кад $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

7° Монотоност и екстремне вредности

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2-4}\right)'=\frac{x'\cdot(x^2-4)-x\cdot(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{x^2-4-x\cdot2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2};$$

$$f'(x)=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$

f опада на инт. $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ и $(2,+\infty)$.

f нема локалних минимума ни максимума.

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

$$f''(x)=\left(-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\right)'=-\left(\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\right)'=$$

$$=-\frac{(x^2+4)'(x^2-4)^2-(x^2+4)\left((x^2-4)^2\right)'}{(x^2-4)^4}=$$

$$=-\frac{2x(x^2-4)^2-(x^2+4)\cdot2\cdot(x^2-4)\cdot(x^2-4)'}{(x^2-4)^4}=$$

$$=-\frac{2x(x^2-4)^2-2\cdot(x^2+4)(x^2-4)\cdot2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=-\frac{2x(x^2-4)^2-4x(x^2-4)(x^2+4)}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{4x(x^2-4)(x^2+4)-2x(x^2-4)^2}{(x^2-4)^4}=$$

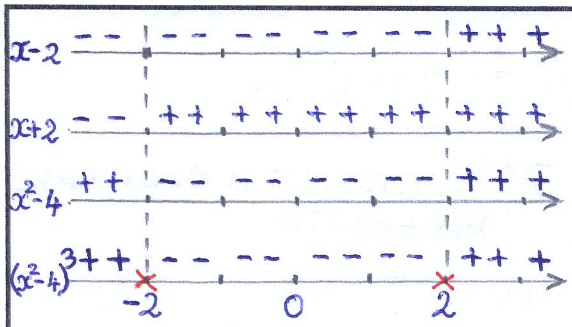
$$=\frac{2x(x^2-4)\left(2(x^2+4)-(x^2-4)\right)}{(x^2-4)^4}=$$

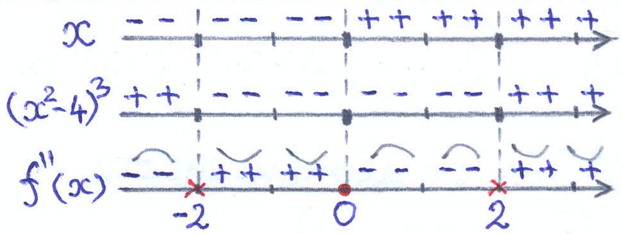
$$=\frac{2x(x^2-4)(2x^2+8-x^2+4)}{(x^2-4)^4};$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3};$$

Израз x^2+12 је увек позитиван. Испитајмо знак израза $(x^2-4)^3$.

$x^2-4=(x-2)(x+2)$.



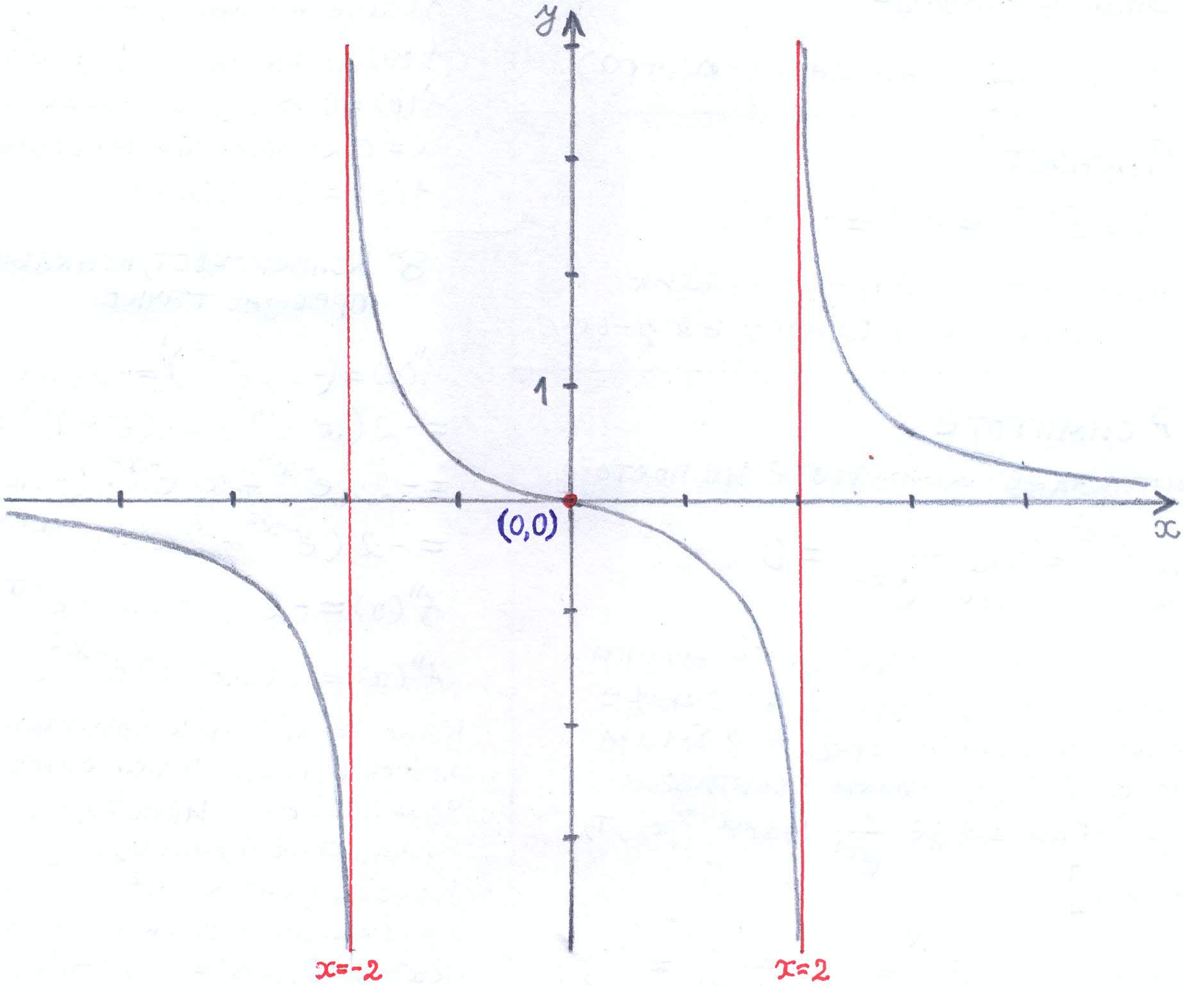


f је конвексна на инт. $(-2,0)$ и $(2,+\infty)$.

f је конкавна на инт. $(-\infty,-2)$ и $(0,2)$.

$f(0)=\dfrac{0}{0^2-4}=0$; Превојна тачка $(0,0)$.

9° Цртање графика



Пример. Скицирати график функције $f(x)=e^{-x^2}$.

1° Област дефинисаности

$D(f)=(-\infty,+\infty)$

2° Нуле функције

$f(x)>0$ за свако x из домена, тако да нуле функције не постоје - нема пресека са x-осом.

3° Пресек са y-осом

$x=0 \to f(0)=e^{-0^2}=e^0=1$; $(0,1)$.

4° Знак функције

f је позитивна на инт. $(-\infty,+\infty)$.

5° Парност

$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$;

Функција f је парна - график је симетричан у односу на y-осу.

6° Асимптоте

Вертикалне асимптоте не постоје.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0;$$

[када $x\to+\infty$, тј. када је x велики позитиван број, онда је x^2 такође велики позитиван број, а самим тим и e^{x^2} је велики позитиван број. Следи да је $\frac{1}{e^{x^2}}$ мали број, тј. $\frac{1}{e^{x^2}}\to 0$]

Слично: $$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0;$$

Права $y=0$ (x-оса) је хоризонтална асимптота графика и када $x\to+\infty$ и када $x\to-\infty$.

7° Монотоност и екстремне вредности

$f'(x)=(e^{-x^2})'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=$

$=-e^{-x^2}\cdot(x^2)'=-e^{-x^2}\cdot 2x$;

$f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}$

Како је e^{-x^2} увек позитивно, знак првог извода зависи само од $-x$.

$-x$: $+ + + + + + + +$ | $- - - - - -$

$f(x)$: $\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$ | $\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$

0

f расте на инт. $(-\infty,0)$;

f опада на инт. $(0,+\infty)$.

$f'(0)=0 \to 0$ је критична тачка.

$x=0 \leftarrow$ локални максимум

$f(0)=1$; $(0,1)$.

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

$f''(x)=(-2xe^{-x^2})'=-2\cdot(xe^{-x^2})'=$

$=-2(x'\cdot e^{-x^2}+x\cdot(e^{-x^2})')=$

$=-2\cdot(e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x))=$

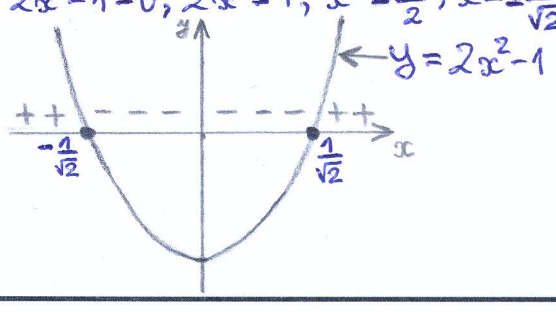
$=-2\cdot(e^{-x^2}-2x^2\cdot e^{-x^2})$;

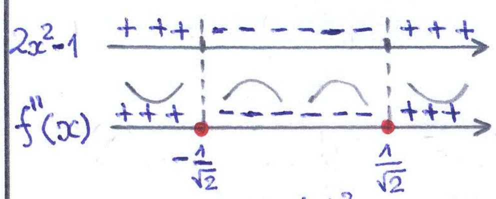
$f''(x)=-2\cdot(1-2x^2)e^{-x^2}$, односно

$f''(x)=2\cdot(2x^2-1)e^{-x^2}$.

Како је e^{-x^2} увек позитивно, знак другог извода зависи само од члана $2x^2-1$. Испитајмо знак квадратне функције $y=2x^2-1$. Коефицијент уз x^2 је $2>0$, па график има овакав облик $\smile$.

$2x^2-1=0$, $2x^2=1$, $x^2=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$





f је конвексна на инт. $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

f је конкавна на инт. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$; $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$; $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$

Превојне тачке: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. $\quad \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$

9° Цртање графика

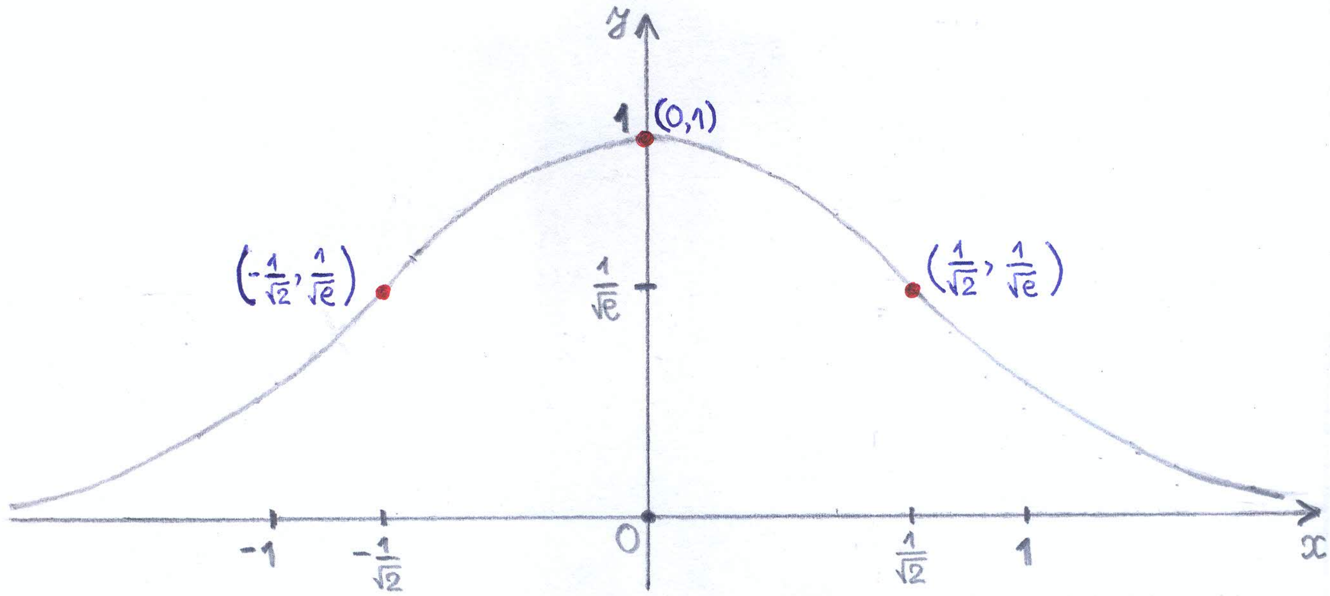


График функције $f(x)=e^{-x^2}$ се назива Гаусова крива. Често се среће и назив звонаста крива јер њен график подсећа на звоно. Функција $f(x)=e^{-x^2}$ има велику примену у статистици.